1. [PAU10J1Q2] Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{cases}$

a) Estudieu el caràcter (és adir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre $p$.
b) Comproveu que si $p \neq 5$ la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

2. [PA102J4Q4] Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$, i hem obtingut:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan $a = 2$.

3. [PAU11J1Q4] Considereu el sistema d'equacions següent: $\begin{cases} x+2y-az=-3 \\ 2x+(a-5)y+z=4a+2 \\ 4x+(a-1)y-3z=4 \end{cases}$

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.
b) Hi ha algun valor de a per al qual $x = 1, y = -3 \ i \ z = -1$ sigui la única solució del sistema?

4. [PAU11J4Q4] Analitzeu, segons els valors del paràmetre $k$, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x+y-z=k-4 \\ (k-6)y+3z=0 \\ (k+1)x+2y=3 \end{cases}$$

5. [PAU12S4Q3] Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=2a+3 \\ 2x-3y+(a-2)z=9 \end{cases}$$

a) Calculeu el valor o el valors del paràmetre a pels quals el sistema és compatible indeterminat.
b) Quantes solucions té el sistema quan $a = -3$?

6. [PAU13J5Q2] La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre $a$ el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?
b) Resoleu el sistema per a $a = 2$.

7. [PAU14J3Q1] Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in R$.

a) Calculeu el rang de la matriu $M$ en funció dels valors del paràmetre a.

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre $a$.

8. [PAU14J4Q2] Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ en funció dels valor de $k$.

b) Resoleu el sistema per a $k = 1$.

9. [PAU14S5Q3] Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m-4)y = m+2' \end{cases}$ per a $m \in R$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors de $m$.

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

10. [PAU15J2Q1] Considereu el sistema d'equacions lineal següent:

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a-2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a-3) = 0 \end{cases}$$

a) Calculeu per a quins valor del paràmetre $a$ el sistema té més d'una solució.

b) Resoleu el sistema per al cas $a = -3$.

11. [PAU15J4Q1] Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -mx + 3y + z = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$, en què $m$ és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.

b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

12. [PAU16J3Q1] Considereu el sistema d'equacions lineal següent: $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{cases}$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real $k$.

b) Resoleu el sistema per a $k = 0$.

13. [PAU16J5Q1] Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Expliqueu raonadament si les afirmacions següents son vertaderes o falses:

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

14. [PAU17J1Q1] Considereu el sistema d'equacions lineals següent que depèn del paràmetre $\lambda$.

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre $\lambda$ el sistema és incompatible.
b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

15. [PAU17J1Q4] Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

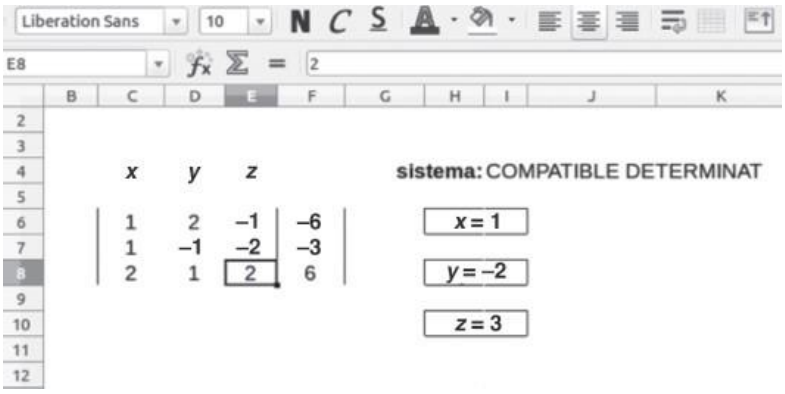
a) Comproveu que $a \neq 0$.
b) Trobeu les solucions dels sistema en funció del paràmetre a.

16. [PAU17J5Q2] Considereu el sistema d'equacions lineal següent: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 2 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$,

en què $k$ és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors de $k$.
b) Resoleu el sistema per al cas de $k = -2$.

17. [PAU18J1Q6] Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:




a) Esbrineu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 ($a_{33}$ de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?

18. [PAU18J5Q6] Considereu el sistema d'equacions lineal següent: $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$, en què $m$ és un paràmetre real.

a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre $m$ el sistema té una única solució.
b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió generals del punt solució.

19. [PAU18S3Q2] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre a:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre $a$.
b) Resoleu el sistema en el cas de $a = 1$.

20. [PAU19J1Q2] Considereu el sistema d'equacions lineals següents, que depèn del paràmetre $\lambda$:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre $k$.
b) Resoleu el sistema per a $k = -1$.

21. [PAU20J1Q2] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real $k$:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valor del paràmetre $k$.
b) Resoleu si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.

22. [PAU20J3Q3] Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valor del paràmetre $a$.
b) Resoleu el sistema per a $a = 2$.

23. [PAU 21J2Q2] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p
b. Resoleu, si és possible, el sistema per al cas p=2

24. [PAU 21J5Q5] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + py - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases}$$

   a. Comproveu que, per a qualsevol valor del paràmetre a, el sistema d'equacions lineals no té solució
   b. Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

25. [PAU 21S1Q1] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

   a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
   b. Resoleu, si és possible, el sistema per al cas k=1, i feu-ne una interpretació geomètrica.

26. [PAU 22J2Q2] Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

   a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
   b. Resoleu, si és possible, el sistema per al cas a= 2.

27. [PAU 22J5Q3] Considereu el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

en què m és un paràmetre real.

   a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m.
   b. Resoleu el sistema, si és possible, quan m = 0 i quan m = 3. En cada cas, doneu la posció relativa dels tres plans a $\mathbb{R}^3$.

28. [PAU 23J1Q4] Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

   a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
   b. Per al cas λ= –1, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.

29. [PAU 23J5Q2] Considereu el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} x - y + kz = -1 \\ x + ky + z = 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z = 2 \end{aligned}\right\}$$

en què k és un paràmetre real.

a. Discutiu el sistema en funció del valor de k.
b. Resoleu el sistema per a k =0 i per a k =1.

30. [PAU 23S2Q3] Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

   a. Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
   b. Resoleu el sistema, si té solució, per al cas m =1.

31. [PAU 24J1Q2] Considereu el sistema d'equacions següent: $\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{aligned}\right\}$

   on k és un paràmetre real.

   a. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k, i resoleu-lo per a k = 0
   b. Resoleu el sistema per a k = –1
   c. Per a k = –1, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

32. [PAU 24S3Q2] Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{aligned}\right\}$$

   a. Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m.
   b. Trobeu la solució del sistema per a m = 0.
   c. Per a m = 2, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi x = 5y.